

Roll No.

E-3339

B. A. (Part III) EXAMINATION, 2021

MATHEMATICS

Paper First

(Analysis)

Time : Three Hours]

[Maximum Marks : 50

नोट : प्रत्येक प्रश्न से कोई दो भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Attempt any *two* parts of each question. All questions carry equal marks.

इकाई—1

(UNIT—1)

1. (अ) डी' ऐलम्बर्ट अनुपात परीक्षण का कथन लिखकर उसे सिद्ध कीजिए।

Write and prove the statement of D'Alembert ratio test.

P. T. O.

(ब) फलन :

$$f(x, y) = x^2 y^2 + \sin x + \cos y$$

के लिए यंग प्रमेय का सत्यापन मूल बिन्दु पर कीजिए।

Verify the Young's theorem at origin for the function :

$$f(x, y) = x^2 y^2 + \sin x + \cos y$$

(स) फलन $f(x)$ के लिए अंतराल $(-\pi, \pi)$ में फूरियर श्रेणी ज्ञात कीजिए, जहाँ :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ \sin x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Find the Fourier series of the function $f(x)$ in the interval $(-\pi, \pi)$, where :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ \sin x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

इकाई—2

(UNIT—2)

2. (अ) 'समाकलन गणित के मूलभूत प्रमेय' को लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove 'fundamental theorem of integral calculus'.

(ब) $\int_0^2 \frac{\log x}{\sqrt{2-x}} dx$ का अभिसरण के लिए परीक्षण कीजिए।

Test the convergence of $\int_0^2 \frac{\log x}{\sqrt{2-x}} dx$.

(स) प्राचल के सापेक्ष अवकलन की सहायता से

$\int_0^\infty x^3 e^{-\alpha x^2} dx, \alpha > 0$ का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of $\int_0^\infty x^3 e^{-\alpha x^2} dx, \alpha > 0$ with the help of differentiation with respect to parameter.

इकाई—3

(UNIT—3)

3. (अ) यदि :

$$w = f(z) = u + iv$$

विश्लेषिक फलन है तथा $u - v = e^x(\cos y - \sin y)$, तब $f(z)$

को z के पदों में ज्ञात कीजिए।

If :

$$w = f(z) = u + iv$$

is an analytic function and $u - v = e^x(\cos y - \sin y)$,

then find $f(z)$ in terms of z .

(ब) दर्शाइए कि रूपान्तरण :

$$w = \frac{2z + 3}{z - 4}$$

वृत्त $x^2 + y^2 - 4x = 0$ को सरल रेखा $4u + 3 = 0$ पर प्रतिचित्रित करता है।

Show that the transformation :

$$w = \frac{2z + 3}{z - 4}$$

maps the circle $x^2 + y^2 - 4x = 0$ onto the straight line $4u + 3 = 0$.

(स) दर्शाइए कि रूपान्तरण $w = \left(\frac{z - ic}{z + ic} \right)^2$, जहाँ c वास्तविक है,

वृत्त $|z| = c$ के दाहिने अर्द्ध-भाग को w -समतल के ऊपरी अर्द्ध-भाग में प्रतिचित्रित करता है।

Show that the transformation :

$$w = \left(\frac{z - ic}{z + ic} \right)^2$$

where c is real, maps the right half of the circle $|z| = c$ into the upper half of the w -plane.

इकाई—4

(UNIT—4)

4. (अ) सिद्ध कीजिए कि किसी दूरीक समष्टि में प्रत्येक संवृत गोलक एक संवृत समुच्चय होता है।

Prove that in a metric space, every closed sphere is a closed set.

- (ब) बानाख (Banach) संकुचन सिद्धान्त को लिखिए तथा सिद्ध कीजिए।

State and prove Banach's contraction principle.

- (स) मान लीजिए कि d एक अरिक्त समुच्चय X पर एक दूरीक है। दर्शाइए कि अग्र रूप से परिभाषित फलन :

$$d^*(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

जहाँ $x, y \in X$, भी X पर दूरीक है।

Let d is a metric on a non-empty set X . Then show that the function defined as :

$$d^*(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

is also a metric on X , where $x, y \in X$.

इकाई—5

(UNIT—5)

5. (अ) बेयर संवर्ग प्रमेय को लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Baire's category theorem.

- (ब) 'प्रत्येक संहत दूरीक समष्टि बोलजानो-वाइएस्ट्रास गुणधर्म (BWP) रखता है।' सिद्ध कीजिए।

Prove that 'every compact metric space has the Bolzano-Weierstrass property'.

- (स) सिद्ध कीजिए कि एक संबद्ध समुच्चय का संतत प्रतिबिम्ब संबद्ध होता है।

Prove that continuous image of a connected set is connected.