

Roll No.

E-3340

B. A. (Part III) EXAMINATION, 2021

MATHEMATICS

Paper Second

(Abstract Algebra)

Time : Three Hours]

[Maximum Marks : 50

नोट : प्रत्येक प्रश्न से कोई दो भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Attempt any *two* parts of each question. All questions carry equal marks.

इकाई—1

(UNIT—1)

1. (अ) किसी समूह के एक अवयव के प्रसामान्यक की परिभाषा लिखिए तथा सिद्ध कीजिए कि $a \in G$ का प्रसामान्यक, समूह G का उपसमूह होता है।

Define the normalizer of an element of a group and prove that normalizer of $a \in G$ is a subgroup of group G .

P. T. O.

- (ब) स्वकारिता को परिभाषित कीजिए। यदि किसी समूह की कोटि 56 है, तो सिद्ध कीजिए वह समूह 1 या 8 सिलो उपसमूह रखता है।

Define automorphism. If order of a group is 56, then show that this group has 1 or 8 Sylow subgroup.

- (स) परिमित आबेली समूह पर कॉशी प्रमेय लिखिए व सिद्ध कीजिए।

State and prove the Cauchy theorem for finite abelian group.

इकाई—2

(UNIT—2)

2. (अ) विभाग वलय को परिभाषित कीजिए। सिद्ध कीजिए कि पूर्णाकों का वलय एक मुख्य गुणजावली वलय होता है।

Define a quotient ring. Prove that ring of integers is principal ideal ring.

- (ब) यूक्लिड वलय की परिभाषा दीजिए व सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक क्षेत्र, एक यूक्लिड वलय होता है।

Define Euclidean ring and prove that every field is a Euclidean ring.

- (स) किसी वलय के प्रतिरूपक को परिभाषित कीजिए। आइंस्टीन के सूत्र की मदद से बहुपद $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ की खण्डनीयता की जाँच कीजिए।

Define module of a ring. With the help of Einstein's formula, check the reducibility of the following polynomial :

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

इकाई—3

(UNIT—3)

3. (अ) दो सदिश उपसमष्टियों के सरल योग को परिभाषित कीजिए तथा इसके लिए आवश्यक व पर्याप्त प्रतिबंध लिखकर सिद्ध कीजिए।

Define direct sum of two vector subspaces and state and prove the necessary and sufficient condition for direct sum of two subspaces.

- (ब) सदिश समष्टि को परिभाषित कीजिए। दिखाइये कि :

$$W_1 + W_2 = [W_1 \cup W_2]$$

जहाँ W_1 और W_2 , $V(F)$ की दो उपसमष्टियाँ हैं।

Define vector space. Show that :

$$W_1 + W_2 = [W_1 \cup W_2]$$

where W_1 and W_2 are two subspaces of $V(F)$.

- (स) दिखाइये कि किसी परिमित विमीय सदिश समष्टि का प्रत्येक रैखिकतः स्वतंत्र उपसमुच्चय सदिश समष्टि का आधार होता है या उसे आधार निर्मित करने के लिए विस्तारित किया जा सकता है।

Show that every linearly independent subset of a finite dimensional vector space is a basis of vector space or it can be extended to construct the basis of vector space.

इकाई—4

(UNIT—4)

4. (अ) लैग्रांज की समानयन विधि से द्विघाती समघात :

$$I = x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2 + 7x_3^2 + 8x_1x_3$$

का विहित घात में समानयन कीजिए और इसकी जाति, सूचकांक और चिन्हिका ज्ञात कीजिए।

By the method of Lagrange's reduction change the bilinear form :

$$I = x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2 + 7x_3^2 + 8x_1x_3$$

into canonical form and find its rank, index and signature.

- (ब) रैखिक रूपान्तरण के लिए सिल्वेस्टर का कोटि-शून्यता प्रमेय लिखिए व सिद्ध कीजिए।

State and prove Sylvester's rank-nullity theorem for linear transformation.

- (स) द्विघाती समघात $x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2$ को वर्गों के योगफल के रूप में रूपांतरित कीजिए।

Transform the bilinear form $x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2$ as sum of squares.

इकाई—5

(UNIT—5)

5. (अ) माना कि $V(C)$ इकाई अंतराल $0 \leq t \leq 1$ पर सभी सतत सम्मिश्र मानक फलनों का सदिश समष्टि है। यदि $f(t), g(t) \in V$ तथा $(f(t), g(t)) = \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt$, तो सिद्ध कीजिए कि V अन्तरगुणन समष्टि है।

Let $V(C)$ be the vector space of all continuous complex valued functions on the unit interval $0 \leq t \leq 1$ with inner product defined by :

$$(f(t), g(t)) = \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt$$

then prove that $V(C)$ is an inner product space.

- (ब) परिमित विमीय सदिश समष्टियों के लिए बैसल की असमिका को लिखकर सिद्ध कीजिए।

State and prove Bessel's inequality for finite dimensional vector spaces.

- (स) ग्राहम-शिमिट के लांबिक प्रक्रम के उपयोग से आधार $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ के लिए प्रसामान्य लांबिक आधार ज्ञात कीजिए, जहाँ :

$$\beta_1 = (1, 0, 1)$$

$$\beta_2 = (1, 2, -2)$$

$$\beta_3 = (2, -1, 1)$$

Find orthonormal basis of basis $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ using Gram-Schmidt orthogonalization process, where :

$$\beta_1 = (1, 0, 1)$$

$$\beta_2 = (1, 2, -2)$$

$$\beta_3 = (2, -1, 1) .$$