

Roll No.

E-3342

B. A. (Part III) EXAMINATION, 2021

MATHEMATICS

(Optional)

Paper Third (B)

(Discrete Mathematics)

Time : Three Hours]

[Maximum Marks : 50

नोट : प्रत्येक प्रश्न से कोई दो भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Attempt any *two* parts of each question. All questions carry equal marks.

इकाई—1

(UNIT—1)

1. (अ) आगमन विधि से दर्शाइये कि $n^4 - 4n^2$, 3 से विभाजित है $\forall n \geq 2$ ।

Show that $n^4 - 4n^2$ is divisible by 3 for all $n \geq 2$ by induction method.

P. T. O.

- (ब) भाषा $L = \{a^x b^y : x > y > 0\}$ के लिए व्याकरण की संरचना कीजिए एवं व्याकरण का नाम भी बताइए।

Construct a grammar for the language $L = \{a^x b^y : x > y > 0\}$ and also name the type of grammar.

- (स) बेज प्रमेय लिखिए एवं इसे सिद्ध कीजिए।

State and prove Bayes' theorem.

इकाई—2

(UNIT—2)

2. (अ) यदि R तथा S समुच्चय X में तुल्यता सम्बन्ध हो, तो सिद्ध कीजिए कि $R \cap S$ भी X में एक तुल्यता सम्बन्ध है।

If R and S is an equivalent relation in the set X, then prove that $R \cap S$ is an equivalence relation in X.

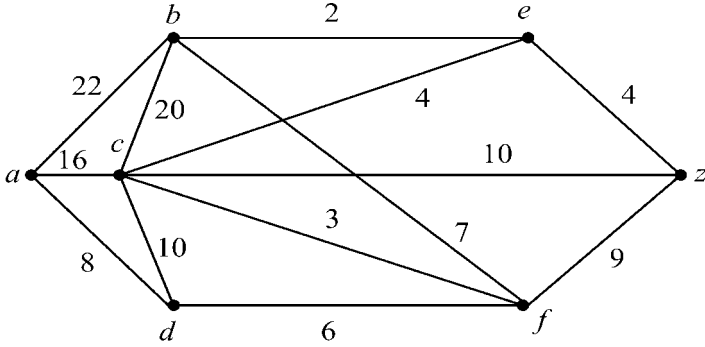
- (ब) मान लीजिए L, 24 के सभी गुणनखण्डों का समुच्चय है और मान लीजिए 'I' L पर विभाज्यता सम्बन्ध है। दर्शाइए कि (L, I) एक लैटिस है एवं हासे आरेख भी बनाइए।

Let L be the set of all factors of 24 and let 'I' be the divisibility relation on L. Show that (L, I) is a lattice.

Also draw Hasse diagram.

- (स) डिकोस्ट्रा (Dijkstra's) एल्गोरिथम की सहायता से निम्नांकित भारित आरेख में a से z तक का लघुतम पथ (shortest path) ज्ञात कीजिए :

Apply Dijkstra's algorithm to find the shortest path from a to z in the weighted graph given below :



इकाई—3

(UNIT—3)

3. (अ) एक परिमित अवस्था यन्त्र की अभिकल्पना कीजिए जो समुच्चय $\{0, 1, 2\}$ को निवेश के रूप में प्राप्त करता है तथा एक निर्गम इस प्रकार जनित करता है कि निर्गम निवेश अनुक्रम में अंकों के योगफल के मॉड्यूलो 3 के बराबर है।

Design a finite state machine that receives the set $\{0, 1, 2\}$ as input and produces an output such that the output is equal to the modulo 3 sum of the digits in the input sequence.

- (ब) यन्त्र को न्यूनतमीकृत (minimize) कीजिए जिसकी अवस्था सारणी नीचे दी गई है :

State	Input		Output
	0	1	
$\Rightarrow S_0$	S_3	S_6	1
S_1	S_4	S_2	0
S_2	S_4	S_1	0
S_3	S_2	S_0	1
S_4	S_5	S_0	1
S_5	S_3	S_5	0
S_6	S_4	S_2	1

Minimize the machine whose state table is given below :

State	Input		Output
	0	1	
$\Rightarrow S_0$	S_3	S_6	1
S_1	S_4	S_2	0
S_2	S_4	S_1	0
S_3	S_2	S_0	1
S_4	S_5	S_0	1
S_5	S_3	S_5	0
S_6	S_4	S_2	1

(स) मान लीजिए a एक संख्यात्मक फलन है जो :

$$a_r = \begin{cases} 2 & ; 0 \leq r \leq 3 \\ 2^{-r} + 5 & ; r \geq 4 \end{cases}$$

से दिया जाता है।

(i) S^2a तथा $S^{-2}a$ का निर्धारण कीजिए।

(ii) Δa तथा ∇a का निर्धारण कीजिए।

Let a be a numeric function given by :

$$a_r = \begin{cases} 2 & ; 0 \leq r \leq 3 \\ 2^{-r} + 5 & ; r \geq 4 \end{cases}$$

(i) Determine S^2a and $S^{-2}a$.

(ii) Determine Δa and ∇a .

इकाई—4

(UNIT—4)

4. (अ) निम्नलिखित अंतर समीकरण को हल कीजिए :

$$a_{r+2} - 4a_{r+1} + 4a_r = r^2$$

Solve the following difference equation :

$$a_{r+2} - 4a_{r+1} + 4a_r = r^2$$

- (ब) जनक फलन विधि का प्रयोग कर निम्नलिखित अन्तर समीकरण को हल कीजिए :

$$a_r - 5a_{r-1} + 6a_{r-2} = 2; r \geq 2$$

दिये गये परिसीमा प्रतिबंध है :

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 2.$$

Solve by the method of generating functions the recurrence relation :

$$a_r - 5a_{r-1} + 6a_{r-2} = 2; r \geq 2$$

with the boundary conditions $a_0 = 1$ and $a_1 = 2$.

- (स) सिद्ध कीजिए कि सभी धन परिमेय संख्याओं का समुच्चय संक्रिया “*” के सापेक्ष एक आबेली समूह बनाता है जबकि संक्रिया “*” निम्न प्रकार से परिभाषित है :

$$a * b = \frac{ab}{2}.$$

Show that the set of all positive rational numbers forms an abelian group under composition defined by :

$$a * b = \frac{ab}{2}.$$

इकाई—5

(UNIT—5)

5. (अ) मान लीजिए a, b, c एक लैटिस (L, \leq) में अवयव है। दर्शाइए कि (L, \leq) में निम्नलिखित “निर्बल” बंटन नियम लागू होता है :

$$(i) \quad a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c) \quad \forall a, b, c \in L$$

$$(ii) \quad (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c) \quad \forall a, b, c \in L$$

Let a, b, c be elements in a lattice (L, \leq) . Show that the following “weak” distributive law holds in (L, \leq) :

$$(i) \quad a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c) \quad \forall a, b, c \in L$$

$$(ii) \quad (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c) \quad \forall a, b, c \in L$$

- (ब) एक बूलीय बीजगणित $(B, +, \cdot, ')$ में निम्नलिखित सर्वसमिकायें सिद्ध कीजिए :

$$p \cdot q \cdot r + p \cdot q \cdot r' + p \cdot q' \cdot r + p' \cdot q \cdot r = p \cdot q + q \cdot r + r \cdot p$$

$$\forall p, q, r \in B$$

Prove the following identity in a Boolean algebra $(B, +, \cdot, ')$:

$$p \cdot q \cdot r + p \cdot q \cdot r' + p \cdot q' \cdot r + p' \cdot q \cdot r = p \cdot q + q \cdot r + r \cdot p$$

$$\forall p, q, r \in B$$

(स) निम्नलिखित स्विचन परिपथ को सरलीकृत स्विचन परिपथ से प्रतिस्थापित कीजिए :

Replace the following switching circuit by a simpler one :

