Roll No. .... Total Printed Pages - 7

F - 3145

B. A. (Part - I) Examination, 2022
(New Course)
Mathematics
Paper First
(Algebra and Trigonometry)

Time : Three Hours] *[Maximum Marks:50*

नोटः प्रत्येक प्रश्न में से कोई दो भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note: Solve any two parts of each question. All questions carry equal marks.

इकाई - 1/Unit - 1

1. (अ) प्रारम्भिक रूपान्तरणों की सहायता से A^{-1} का मान ज्ञात

कीजिए जहाँ $A=\begin{bmatrix}1 & -3 & 2\\ 2 & 0 & 0\\ 1 & 4 & 1\end{bmatrix}$

With the help of elementary transformation find A^{-1}

where $A=\begin{bmatrix}1 & -3 & 2\\ 2 & 0 & 0\\ 1 & 4 & 1\end{bmatrix}$

अथवा/OR

(ब) आव्यूह $A=\begin{bmatrix}8 & -6 & 2\\ -6 & 7 & -4\\ 2 & -4 & 3\end{bmatrix}$ के अभिलाक्षणिक मूल और संगत अभिलाक्षणिक सदिश ज्ञात कीजिये।

Find the characteristic values and the corresponding characteristic vector of the Matrix

$$A=\begin{bmatrix}0 & c & -b\\ -c & 0 & a\\ b & -a & 0\end{bmatrix}$$

(स) दर्शाइये कि आव्यूह $A=\begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix}$ कैले-हेमिल्टन प्रमेय को सन्तुष्ट करते हैं। अतः A^{-1} ज्ञात कीजिये।

Show that the matrix $A=\begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix}$ satisfies Cayley- Hamilton theorem. Hence find A^{-1} .

इकाई - 2/Unit - 2

2. (अ) दिखाइये कि निम्न समीकरण असंगत हैः (आव्यूह विधि द्वारा)

$$x+y+z=-3$$
$$3x+y-2z=-2$$
$$2x+4y+7z=7$$

Show that the following equations are inconsistent (using matrix method):

$$x+y+z=-3$$
$$3x+y-2z=-2$$
$$2x+4y+7z=7$$

(ब) यदि समीकरण $x^3+3px^2+3qx+r=0$ के मूल गुणोत्तर श्रेणी (G.P.) में हो तो सिद्ध कीजिए कि $p^3r=q^3$.

If the roots of the equation $x^3+3px^2+3qx+r=0$ are in G.P., then Prove that $p^3r=q^3$.

(स) समीकरण $x^3-15x-126=0$ को कार्डन विधि से हल कीजिए।

Solve the equation $x^3-15x-126=0$,by Cardon's Method.

इकाई - 3/Unit - 3

3. (अ) यदि I शून्य रहित पूर्णांकों का समुच्चय हो और संबंध R
इस प्रकार परिभाषित है कि xRy यदि और केवल यदि

$x^y = y^x$, जबकि $x, y \in I$, तो क्या संबंध R एक तुल्यता संबंध हैं?

If I is the set of non - zero integers and a relation R is defined by xRy iff $x^y = y^x$, where $x, y \in I$, then whether the relation R is an equivalence relation?

(ब) यदि समुच्चय $S = R - \{1\}$ में, जहाँ R वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है, '$*$' एक संक्रिया है, जहाँ $a*b=a+b,-ab \quad \forall a,b \in s$ तो सिद्ध कीजिए कि $(s,*)$ एक समूह है।

If in set $S = R - \{1\}$, where R is the set of all real numbers, '$*$' is an operation where , $a*b=a+b,-ab \quad \forall a,b \in s$, then prove that $(s,*)$ is a group.

(स) कैली का प्रमेय लिखकर सिद्ध कीजिए।

State and prove Cayley's Theorem.

इकाई - 4/Unit - 4

4. (अ) समाकारिता का मूलभूत प्रमेय लिखिए व सिद्ध कीजिए।

State and prove, fundamental theorem on homomorphism.

P.T.O.

(ब) सिद्ध कीजिये कि समूह $(G,\cdot)=(\{z:z^n=1,\ z\in C\},\cdot)$ समूह $(G',+_n)=(\{0,1,2,......,(n-1)\},n+_n)$ से तुल्याकारी है।

Pove that the group $(G,\cdot)=(\{z:z^n=1,\ z\in C\},\cdot)$ is isomorphic to the group $(G',+_n)=(\{0,1,2,......,(n-1)\},n+_n)$

(स) दर्शाइये कि $a+b\sqrt{2}$ के रूप की संख्याओं का समुच्चय, जहाँ a और b परिमेय संख्यायें हैं, एक क्षेत्र है।

Show that the set of numbers of the form $a+b\sqrt{2}$, with a and b as rational numbers is a field.

इकाई - 5/Unit - 5

5. (अ) यदि $x+\frac{1}{x}=2cos\theta$, तो सिद्ध कीजिए कि

$$x^n+\frac{1}{x^n}=2\cos n\theta \text{ तथा } x^n-\frac{1}{x^n}=2i\sin n\theta$$

If $x+\frac{1}{x}=2cos\theta$, then prove that

$$x^n+\frac{1}{x^n}=2\cos n\theta \text{ and } x^n-\frac{1}{x^n}=2i\sin n\theta$$

(ब) यदि $\tan(\alpha + i\beta) = x + iy,$,सिद्ध कीजिए कि

(i) $x^2 + y^2 + 2x \cot 2\alpha = 1$

(ii) $x^2 + y^2 - 2y \coth 2\beta + 1 = 0$

If $\tan(\alpha + i\beta) = x + iy,$, prove that

(i) $x^2 + y^2 + 2x \cot 2\alpha = 1$

(ii) $x^2 + y^2 - 2y \coth 2\beta + 1 = 0$

(स) सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{\pi}{12} = \left(1 - \frac{1}{3^{1/2}}\right) - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3^{3/2}}\right) + \frac{1}{5}\left(1 - \frac{1}{3^{5/2}}\right) - \dots\dots\dots \infty$$

Prove that

$$\frac{\pi}{12} = \left(1 - \frac{1}{3^{1/2}}\right) - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3^{3/2}}\right) + \frac{1}{5}\left(1 - \frac{1}{3^{5/2}}\right) - \dots\dots\dots \infty$$