Roll No. .... Total Printed Pages - 6

F - 3350

B. A. (Part - III) Examination, 2022
(Old/New Course)
Mathematics
Paper Second
(Abstract Algebra)

Time : Three Hours] *[Maximum Marks:50*

नोटः प्रत्येक प्रश्न से कोई दो भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note: Attempt any two parts of each question. All questions carry equal marks.

इकाई -I/Unit - I

1. (A) किसी समूह के केंन्द्र की परिभाषा दीजिए। सिद्ध कीजिए कि यदि G कोटि P^n का एक समूह है जहाँ P एक अभाज्य संख्या है तथा n एक धन पूर्णांक है, तब समूह G अवश्य

P.T.O.

ही एक अतुच्छ केंद्र रखता है।

Define centre of a Group. Prove that if G is a group of order P^n, where P is a prime number and n is a positive integer, then G will have a non - Trivial centre.

(B) द्वितीय सिलो प्रमेय लिखिये और सिद्ध कीजिए।

State and prove second theorem of Sylow.

(C) यदि G एक समूह है f , G का एक स्वाकारिता है, N, G का एक प्रसामान्य उपसमूह है, N, G तब सिद्ध, कीजिए कि f(N) का एक प्रसामान्य उपसमूह हैं।

If G be a group, f is an automorphism in G, N is a normal subgroup of G, then prove that f(N) is a normal subgroup of G.

इकाई -II/Unit - II

2. (A) सिद्ध कीजिए कि एक इकाई सहित क्रम विनिमेय वलय एक क्षेत्र होता है यदि और केवल यदि उसकी कोई उचित गुणजावली नहीं हैं।

Prove that a commutative ring with identity is a field if and only if it has no proper ideals.

(B) दर्शाइये कि क्षेत्र F पर बहुपद प्रान्त F(x) एक क्षेत्र नहीं है।

Show that the polynomial domain F(x) over the field F is not a field.

(C) क्षेत्र (Q,+,·) में बहुपदों

$f(x)=x^4+x^3+2x^2+x+1$ तथा $g(x)=x^3-1$ का महत्तम उभयनिष्ठ भाजक ज्ञात कीजिए तथा इसे दोनों बहुपदों के एक रैखिक संयोजन में व्यक्त कीजिए।

Find the g.c.d of the polynomial.

$f(x)=x^4+x^3+2x^2+x+1$ and

$g(x)=x^3-1$ over the field (Q,+,·) and express it as a linear combination of the two polynomials.

इकाई -III/Unit - III

3\. (A) दर्शाइये कि किसी सदिश समष्टि V(F) के एक अरिक्त उपसमुच्चय w सदिश उपसमष्टि होगी यदि और केवल यदि, $a \in \mathrm{F}$ तथा $\alpha, \beta \in w \Rightarrow a\alpha+\beta \in w$

Show that a non - empty subset w of a vector space V(F) is a subspace iff, $a \in \mathrm{F}$ and $\alpha, \beta \in w \Rightarrow a\alpha+\beta \in w$

(B) किसी सदिश समष्टि के आधार की परिभाषा दीजिए। दर्शाइये कि सदिश

$\alpha_1=(1,0,-1), \alpha_2=(1,2,1), \alpha_3=(0,-3,2)$ $V_3(R)$ का आधार है।

Define basis of a vector space. Show that the vectors $\alpha_1=(1,0,-1), \alpha_2=(1,2,1), \alpha_3=(0,-3,2)$ form a basis of $V_3(R)$.

(C) सिद्ध कीजिए कि किसी सदिश समष्टि V(F) के किसी समुच्चय S का एकघाती विस्वृति L(S), S द्वारा जनित V की एक उपसमष्टि होती है, अर्थात् L(S) = [S]

Prove that the linear span L(S) of any subset S of a vector space V(F) is a subspace of V generated by S, i.e. L(S) = [S].

इकाई -IV/Unit - IV

4\. (A) सिद्ध कीजिए कि किसी समाकारिता की अष्टि (कर्नेल) सदिश समष्टि V (F) की सदिश उपसमष्टि होती है।

Prove that the Kernal of a homomorphism is a vector subspace of the vector space V (F).

(B) निम्नांकित द्विघाती समघात को विहित रूप में व्यक्त कीजिए तथा इसकी जाति, सूचकांक एवं चिन्हिका ज्ञात कीजिए :

$9=x^2-2y^2+3z^2-4yz+6zx$

Reduce the quadratic form :

$9 = x^2 - 2y^2 + 3z^2 - 4yz + 6zx$ into canonical form and find its rank, index and signature.

(C) यदि T, R^3 पर रैखिक संकारक है जो-

$T(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, -x_1 - x_2 - 4x_3,\ 2x_1 - x_3)$

से परिभाषित है। आधार $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ जहाँ $\alpha_1 = (1,1,1)$, $\alpha_2 = (0,1,1)$, $\alpha_3 = (1,0,1)$ है के सापेक्ष T का आव्यूह ज्ञात कीजिए।

If T be a linear operator on R^3 defined as:

$T(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + x_2 + x_3 , -x_1 - x_2 - 4x_3 , 2x_1 - x_3)$,

find the matrix of T with respect to basis $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, where $\alpha_1 = (1,1,1)$, $\alpha_2 = (0,1,1)$, $\alpha_3 = (1,0,1)$

इकाई -V/Unit - V

5. (A) श्वार्ज असमिका लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Schwartz's inequality.

(B) यदि α और β अन्तर गुणन समष्टि V(F) के सदिश हो तो सिद्ध कीजिए कि :

P.T.O.

$$\|\alpha + \beta\|^2 + \|\alpha - \beta\|^2 = 2\|\alpha\|^2 + 2\|\beta\|^2$$

परिणाम की ज्यामितीय व्याख्या कीजिए।

(B) If α and β are vectors in an inner product space V(F), then prove that :

$$\|\alpha + \beta\|^2 + \|\alpha - \beta\|^2 = 2\|\alpha\|^2 + 2\|\beta\|^2$$

Interpret the result geometrically.

(C) यदि V एक आंतर गुणन समष्टि है और $\alpha, \beta \in V$, तब दर्शाइये कि : $\alpha = \beta \Leftrightarrow (\alpha, \gamma) = (\beta, \gamma)\ \forall\ \gamma \in V$.

If V be an inner product space and $\alpha, \beta \in V$, then show that : $\alpha = \beta \Leftrightarrow (\alpha, \gamma) = (\beta, \gamma)\ \forall\ \gamma \in V$.